**Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen**
**27 Juni 2006, 14.00–17.00 uur**

1. Los het volgende niet-lineaire Cauchy probleem op:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u(2x, 0) = 5x.$$

2. Laat zien dat de uitdrukking

$$(1+x^2)(4+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (5+2x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

hyperbolisch is en bepaal de karakteristieken.

3. Beschouw voor $0 \le \alpha < c$ de gedempte golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t},$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Substitueer $u(x,t) = X(x)T(t)$.

(a) Toon aan dat dezelfde eigenwaarden $k^2$ en eigenfuncties $\sin kx$ optreden met $k \in \mathbb{N}$ als bij het ongedempte geval $\alpha = 0$.

(b) Bepaal voor $k \in \mathbb{N}$ de bijbehorende vergelijking voor $T(t)$.

(c) Laat zien dat de algemene oplossing voor $u(x,t) = X(x)T(t)$ bij $k \in \mathbb{N}$ gegeven wordt door

$$e^{-\alpha t}\left[a_k \cos\sqrt{k^2c^2 - \alpha^2}t + b_k \sin\sqrt{k^2c^2 - \alpha^2}t\right] \sin kx.$$

(d) Bepaal de coefficienten $a_k$ en $b_k$.

*zie ommezijde*

4. Beschouw de warmte-geleidingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(\pi - x), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0,$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat de vergelijking kan worden gereduceerd tot een homogene warmte-geleidingsvergelijking. Hint: substitueer $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$.

(b) Bepaal de steady state oplossing $w(x)$, met andere woorden, bepaal $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

5. Neem aan dat $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ een voldoende glad gebied is en neem aan dat $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ een continue functie is. Toon aan dat onder alle oplossingen van het niet-lineaire probleem

$$\Delta u - u^2 = 0 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

met de randconditie

$$u = f \quad \text{op} \quad \partial\Omega,$$

er hooguit één niet-negative oplossing is.
Aanwijzing: gebruik $\int_\Omega ((\nabla w)^2 + w\Delta w)dxdydz = \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial w}{\partial n} dS$, één van de formules van Green.